散逸系としての脈動星とカオス(基研短期研究会『天体現象と非線形・非平衡物理』,研究会報告)

竹内, 峯

散逸系としての脈動星とカオス

東北大・理　竹内峯

1．変光星と恒星の脈動

変光星とは、見掛けの明るさが変動するような恒星のことである。見掛けの明るさが周期的に変わる原因としては、恒星相互の食による場合や、単一の恒星が流体力学的振動を行なってその反映として星の明るさの変動などががある。その他に不規則に分布する物質に光が遮られることによって生ずる変光星や、各種の爆発的な現象に起因する変光星もある。単一の恒星が流体力学的な振動によって変光するような変光星を、脈動変光星という。以下、非線形力学が脈動変光星の研究において、どのように活かされているかを紹介しよう。

脈動変光星の分類

ところで、観測されている脈動変光星にはどのような種類があるであろうか。その主なものを簡単に述べておきたい。

(1) まず規則的に変光する一群の超巨星あるいは巨星がある。変光の周期は 100日以上のものから数時間程度まである。ケフェウス座デルタ星やこと座ＲＲ星を代表とするもので、動径方向の振動、すなわち半径が周期的に変動しているということは、各種の観測によって確かめられている。この種の変光星の研究はかなり進んでいる。

(2) ケフェウス座デルタ星などよりも赤い超巨星や巨星で、規則的、半ば規則的にあるいは不規則に変光するものがある。ミラ（くじら座オミクロン星）のような周期 300日以上のものが多いが、周期が1000日以上から数十日のものまで観測されている。

(3) 矮星で短周期の多重周期的な変光が観測されている。太陽でも非動径方向の脈動が観測されている。

(4) 白色矮星で同じく多重周期的な変光を示すものがある（くじら座ＺＺ星など）。周期は 100 ～1200秒程度である。

脈動の機構

恒星の脈動を取り扱う方法は、19世紀末から工夫されており、その基本は Eddington によって確立されている。すなわち、恒星の構造を表わす流体力学の偏微分方程式を、釣り合い状

態を示す部分と、それからの微少な変化を示す部分に分け、微少な変化を表わす部分を線形の方程式としてして周期解を求め、それらの周期解の各モードの安定性を調べるという手順である。　多くの場合、恒星の外層に豊富に含まれている水素やヘリウムなどの熱力学的性質により、これらのモードの振動的安定性が左右される。この方法は多くの恒星の模型に適用され、それらの動径方向脈動および非動径方向脈動の周期、安定性が調べられてきた。最近の結果まで含めた最良の解説は J.P.Cox [1] のものであろう。非動径方向振動においては多くのモードが存在するが、それらを積極的に利用して恒星の内部構造を明らかにしようという研究が進められている。星震学と呼ばれているのがこれである。

２．非線形脈動

恒星の脈動の振幅が微少とはいえない場合には、以上のような線形近似の手順で求めた結果だけでは、問題を十分に把握したとはいえない。そこで、Eddington は二次の微小量まで考慮した取り扱いについて研究した。　展開によって二次の微小量まで取り扱おうという試みは、半径の変動の性質については定性的な説明を与えているが、恒星の外層では非断熱的変化が生じ、かつ非線形性が著しくなるので、断熱変化から順次近似を上げて行く方法は有効でない。このため、脈動星の非線形的な挙動については、流体力学の法則を組合せたものを計算機によって数値的に解く、いわゆる数値シミュレーションによるのが常となっている。特定の恒星の脈動を数値シミュレーションによって調べるためにつくられたプログラムを、その恒星の流体力学的模型と呼ぶ。脈動星に多くのモードがあって、それらのうちのどのモードが実際に励起されるかは、普通はこうした流体力学的模型によらなければならない。

振動の理論を考えた場合、複数の振動モードが存在している場合には、それらの間の結合を考慮しなければならない。この場合、共振、同調などの現象が生ずる。共振や同調を考慮しつつ恒星の脈動を研究しようとする動きが最近高まってきている。例えばみなみのさんかく座Ｕ星、カシオペヤ座ＴＵ星などは二つの周期の振動に分解されるので、二重周期ケフェウス型変光星と呼ばれる。二つのモードが同時に観測されるのは、モード間の結合が弱いからであろうが、どのような状況でモード間結合が弱くなっているのかは解明されてはいない。また、磁気を帯びた短周期の変光星や白色矮星などでは、観測結果は多くのモードに分解されている。このような多くのモードが現実の恒星の振動モードに対応しているならば、分解された各モード毎の振幅の消長は、相互に結合した多数の振動子の間で振動のエネルギーのやりとりとして研究することにより説明されるはずである。これらに対して、おうし座ＲＶ星やヘルクレス座ＵＵ星などのように、周期が長く不規則な変光を示す巨星・超巨星の場合は、複数のモードの結合という考え方では、容易には変光が説明できそうにもなかった。

最近、銀緯の高い超巨星の存在が恒星の進化の観点から注意され、それらの恒星の不規則な変光を研究の手掛りに利用できないかということが問題にされるようになった。ぎょしゃ座イプシロン星は巨大な暗黒の天体を伴星にもつということで関心を持たれていたが、この系の明るい方の恒星はやはり不規則な変光をしている。脈動星の理論からすれば、このような不規則な変光は質量の小さな超巨星に特有なものであると考えられ、実際この星は質量が小さいとい

う観測上の別な証拠も得られている。このような小質量でかつエネルギー放出量の大きい恒星は、惑星状星雲の母星であると思われるので、そのような観点からも興味が持たれる。

3．散逸系としての脈動星

脈動変光星は恒星の構造や進化を調べるうえで有用な知識を与えてくれる可能性を持っているのであるが、以上のようにその非線形的な挙動あるいは多重周期的挙動については十分に研究されているとはいえない。そこで、最近の非線形力学の成果を脈動変光星の研究にうまく仕えないかという考えがでてくる。このような立場からの紹介としては、Perdang [2] Buchler [3] らのものがある。

脈動星の非線形的挙動の研究にあたっては、以下のような模型が考えられる。

(1) 1個の散逸系である振動子で近似する

(2) 複数の保存系である振動子が相互に結合しているとして近似する

(3) 複数の調和振動子と雑音が重なり合っているとする

Baker, Moore and Spiegel [4] は (1) の模型でさまざまな不規則振動が得られるとしたが、具体的実例は最近まで得られなかった。Buchler and Regev [5] や Auvergne and Baglin [6] は、平衡状態が力学的不安定にある恒星の一層模型が、さまざまな規則的あるいは不規則的振動を示すことを明らかにした。Perdang ら[7] は、複数の非線形振動子からなる保存系のカオスとして不規則変光星が近似される可能性を追及した。これに対して、Tanaka and Takeuti [8] は、散逸系である1個の振動子で不規則な恒星の脈動が近似できる可能性を示した。(3) の考え方は、かつて Eddington が提唱したものであるが、最近 Perdang and Blacher [9] らの研究がある。ここでは、表題にあるとおり散逸系として脈動星のカオスを近似する方法を主として考えてみたい。

非線形振動を表わすレスラーの式[10]は、僅かに1個の非線形項を持つのみであるのにもかかわらず、係数の変化につれて1周期の解から2周期、4周期、8周期と周期の倍化する系列を示し、やがてカオス的振動に移行する。Rossler 自身は、この式には特別な物理的な意味はないが、非線形振動を研究する際にひとつの典型として役立つであろうとしていた。これを恒星の一層模型の式と比較し易いように変形してみると、圧力の時間変化を表わす式の非断熱項に相当する部分が、位相空間において、ある与えられた双曲面によって特徴づけられるようになっていることが分かる。Tanaka and Takeuti [8]はこのことに着目し、恒星の一層模型のエネルギーの式を、準断熱層 (quasi-adiabatic region) の影響を表現する項と非断熱層(non-adiabatic region) の現象を表現する項とから構成するようにし、後者として双曲面によって特徴づけられるような表現を採用した。Buchler and Regev やAuvergne and Baglin は準断熱層の効果だけを取り上げるようにしていたので、この点で改良したわけである。その結果、平衡状態が力学的にも熱的にも安定で、かつ有限振幅で振動する解を得ることができた。 さらに、係数の変化に応じて周期倍化の系列を示す場合も見出された。

二重周期ケフェウス型変光星のように、確かに複数の振動モードが励起されていると思われ

る例もあるから、複数のモードの間でエネルギーが交換され、それがカオスになっている例もあるかも知れない。他方、振幅が大きくなれば恒星の脈動に際しての散逸は大きくなると思われるから、そのような振幅に非線形的に依存する散逸によって不規則な振動が生ずる場合もあると思われる。どちらの模型が妥当であるかは、模型と観測の詳しい比較によって決められることになる。

4．恒星の脈動を表わす振動子

質点と、その周囲にその質点の重力によって捕らえられている一様な気体球によって、恒星を近似することとする。このような模型は一層模型と呼ばれており、その脈動を表わす式は次のように書かれる。

$$dx/dt = y \quad (1), \quad dy/dt = 4x + z \quad (2), \quad dz/dt = -3\gamma y + F(x,y,z,t) \qquad (3).$$

ここで、 x,y,z は各々気体球の半径、半径の時間変化、圧力の相対的な変化量を適当な単位で表わしたものである。(1) 式は y の定義であり、(2) 式は運動方程式、(3) 式は状態方程式である。γ は断熱指数であり、$F(x,y,z,t)$ は非断熱変化を表わす項である。このような恒星の一層模型の外層は、物質の温度が表面に比べて高く、熱の流出はその温度勾配と光学的厚さによって示される。光学的厚さは、その層の密度、厚さ、放射と物質の相互作用の程度によって定まるから、x と z によって、その層のエントロピーの変化を表わすことができる。したがって、非断熱性の程度を示す係数 ε と、半径、圧力への依存度を表わす係数 χ_x と χ_z によって、

$$F = -\varepsilon(\chi_x x + \chi_z z), \qquad (4)$$

と書かれる。この式はすでに研究されていて（例えば Baker [11] ）現実の恒星の脈動の微小振幅における振る舞いを表わしている。

(4) 式は見るとおり線形近似である。この準断熱変化をする層の近似を線形ではなく非線形にしても一般には特別な現象は見られず、脈動を表現する位相空間での軌道が多少変形する程度である。断熱近似においては、位相空間における軌道が $z = -(3\gamma - 4)x$ なる面上に限定されており、そのために軌道の折り返しが不可能となっているのであるが、準断熱層における過程は軌道の折り返しをつくるほどに強く断熱軌道からの逸脱をもたらし得ないので、カオス的軌道が生じないのである。 Buchler and Regev [5]、Auvergne and Baglin [6] らは、(3) 式の右辺第１項すなわち断熱変化を表わす項に非線形性を導入すれば、脈動が複雑な軌道をとり得ることを示したが、この項は dz/dt の y 依存性を定めることになっており、軌道の折り返しをつくるうえで効果的な項である。

ところで、脈動変光星の流体力学的模型をよく見てみると、星の表面に極めて近い層で非断熱的な熱の流出が生じており、その流出は恒星の半径極小時よりやや遅れて観測される。これ

は脈動星の研究の歴史において“位相のおくれ”の問題として記憶されているものであって、恒星の表面に近い水素とヘリウムの電離臨界層が大量のエネルギーを貯え、ある時期に放出することによって生ずる。このような位相のおくれた熱の放出を非断熱変化の項に取り入れることによって、不規則な脈動を生じさせようとするのが、Tanaka and Takeuti [8] の提起した新しい非線形近似である。彼らは先の (3)式の代わりに、

$$F = m_x x + m_z z + (n_0 + n_1 z + n_2 y)\, y, \qquad (5)$$

なる式を用いた。 $m_x x + m_z z$ は、恒星の準断熱的変化をする層の効果を表現している。次の $(n_0 + n_1 z + n_2 y)\, y$ は、位相のおくれた熱の強い放出を近似的に表現するために持ち込まれた項である。(5) 式を用いた場合、この系の原点近傍の解は次の条件

$$m_z < 0, \quad n_0 < 1, \quad m_x < 4m_z, \quad m_x > (1 - n_0)\, m_z,$$

が満足されるときに安定である (Hurwitz の条件) 。これらのうち３番目の条件は secular stability の条件とされており、４番目の条件は vibrational stablity を示している。なお断熱近似の場合 $(F = 0)$ の $(3\gamma - 4) > 0$ が dynamical stability である。脈動変光星の研究において興味のあるのは、系が secular には安定であって、かつ振動が成長するような場合すなわち vibrational instability である場合である。

(5) 式を用いた場合の恒星の脈動の式は適当な変換を行なえば次の式となる。

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = \alpha x + \mu y + z, \quad dz/dt = -\beta y + pz - qy + syz. \qquad (6)$$

この系は１個の特異点が原点にあり、係数に応じて発散する解、周期解、カオスとなる解などがある。要するに恒星の脈動を表現するにあたって、内部の準断熱層に着目するのみでなく表面の非断熱層の性質を考慮することにより、規則的変光星から不規則的変光星への移行を示すことができたのである。(5) 式に立ち戻って考えれば、表面の非断熱項が同じであれば、内部の準断熱変化による脈動の励起の強さが、周期倍化の際のパラメターとなる。振動の励起が強まれば振動はカオスへと移行する。(6) 式は、じつは良く知られたレスラーの式を僅かに変形した形になっており、レスラーの式について知られている性質に似た性質を示す。なお、この式と比較するにはレスラーの式を次のように書いておいた方が見易い。 (Tanaka and Takeuti [12])

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -x + ry + z, \quad dz/dt = (\;-q)(-rx + y - pr) - pqr. \qquad (7)$$

レスラーの式は２個の特異点をもっているが、この表現の場合は $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ 及び $x = q - p,\ y = 0,\ z = q - p$ である。(6) 式はレスラーの式の２番目の特異点を無限に遠方

に移し、かつ dz/dt の性質を多少簡単化した場合に他ならない。ただし、運動方程式中のxの係数が - 1 ではなく + 4 になっているために、係数と軌道の性質の間の対応が異なってくる。また、運動方程式の中の減衰項は、状態方程式の中の係数と異なってもよいようにしてある。ある平衡状態の近傍での振動を扱ううえでは、もとのレスラーの式よりも、田中・竹内の振動子のほうが使い易いように思われる。なお、一般に知られているレスラーの式の表現は次のようなものである。

$$dX/dx = - X - Z, \quad dY/dt = X + aY, \quad dZ/dt = b + Z(X - c).$$

5．結論

これまでの研究の結果から幾つかのことが言えるが、その第１点は、不規則変光星を研究するにあたって、複数の振動モードの共存あるいはそれらの間の結合という構図に必ずしもとらわれなくとも良いということである。 例えばＦ型より赤い巨星や超巨星の規則性の見えない変光を、各振動モードの結合として理解しようとする試みは幾つかあるが、結果ははっきりせず、振動モードの結合について種々の模索が行われてきた。各種振動モード間の結合の法則はもちろん重要な研究の対象であろうが、単一モードであってカオスとなっているということで解決されれば、もっとも分かり易い。

第２点は、非線形振動研究の典型としてのレスラーの式の有用さである。田中・竹内の振動子（式 (6)）は、要するにレスラーの式のある種の応用である。振動がカオスになっていると思われる場合は、どこかでレスラーの式に似た関係が生じているのではないかと疑って試してみる必要があるのではなかろうか。

ところで、現実の脈動変光星の研究という観点からは、問題はこれからである。ここで紹介したカオスに至る振動子の性質を、現実の恒星の諸条件に照らして調べ、観測される各種脈動変光星の性質をうまく再現するかどうか見なければならない。

参考文献

[1] J.P. Cox, "Theory of Stellar Pulsation", (Princeton Univ. Press, 1980).
[2] J. Perdang, in "Chaos in Astrophysics", eds. J.R. Buchler et al., = NATO ASI Ser. **C161**, (Reidel, 1985) 11.
[3] J.R. Buchler, in "Chaotic Phenomena in Astrophysics", eds. J.R. Buchler and H. Eichhorn = Annals New York Acad. Sci. **497** , (New York Acad. Sci., 1987) 37.
[4] N.H. Baker, D. Moore and E.A. Spiegel, Astron. J. **71** (1966) 845.

[5] J.R. Buchler and O. Regev, Astrophys.J. 263 (1982) 312.
[6] M. Auvergne and A. Baglin, Astron. Astrophys. 142 (1985) 388.
[7] J. Perdang and S. Blacher, Astron. Astrophys. 112 (1982) 35, ibid. 136 (1984) 263.
[8] Y. Tanaka and M. Takeuti, (1987) in preparation. その要旨は M. Takeuti and Y. Tanaka, in the proceedings of IAU colloquium no.108, in press; M. Takeuti, in the proceedings of the workshop on Multimode Stellar Pulsations, (1988) in press に発表されている。
[9] J. Perdang and S. Blacher, in the proceedings of the workshop on Multimode Stellar Pulsations, (1988) in press.
[10] O.E. Rossler, Phys. Letter 57A (1976) 397.
[11] N.H. Baker, in "Stellar Evolution", eds. R.F. Stein and A.G.F. Cameron (Plenum Press 1966) 333.
[12] Y. Tanaka and M. Takeuti, (1987) unpublished.

脈動星の流体模型に現われる間欠カオス

東北学院大・工　相　川　利　樹

§1　はじめに

脈動変光星の変光曲線をみるとさまざまなものがある。典型ケフェウス型や琴座RR型変光星などは，安定な周期的変化曲線を示しており，有限振幅の極限周期解にある脈動だと考えられる。これに反して，RV Tau型や半規則型の変光星などでは，字づらからも想像されるが，種々の程度において変光曲線は不規則な特徴を示している。

これら種々の脈動変光星の示す変光曲線の特徴を統一的に理解しようとするとき，3つの考え方がある：(1)典型ケフェウス型などは単一の周期の脈動である。これに反して，多重周期を持つ変光星があり，みかけの上で不規則とみえる脈動をしている。(2)単一周期の脈動に，星の外層での対流層に伴う雑音が種々の程度に重なり，種々の変光曲線を作り出す。(3)極限周期解から不規則な脈動までは脈動星の非線形振動の結果として理解される。つまり，この場合には不規則的な脈動は，決定方程式で現われるカオスであると考えるわけである。

現実の変光星がどの原因によっているかを特定するためには，変光曲線の系統的な観測が必要であるが，(3)の立場に立つと，脈動星の非線型振動の理論的研究からも大きな示唆が得られる。

典型ケフェウス型変光星は，星の進化の中で，主系列から赤色巨星への進化の過程で，脈動不安定帯 (Instability Strip) の中にあると考えられている。一方，RV Tau型や不規則変光星は，赤色巨星枝 (Asymptotic giant branch) で，大量の質量放出をして，小質量超巨星となり，脈動不安定帯にあると